Commande optimale
Examen (CC)

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés.

▷ **Exercice 1** (7 points)**.** On considère le problème du temps minimum pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}$, et où $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ sont fixés. On fixe également $q(t_f) = 0$ mais on laisse $\dot{q}(t_f)$ libre.

1.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec f que l'on précisera.

1.2. Donner le hamiltonien du problème.

1.3. Déterminer le système adjoint.

1.4. Écrire les conditions de transversalité.

1.5. Déterminer le contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint à l'aide de la condition de maximisation.

1.6. En déduire la valeur du temps final en fonction des conditions initiales q_0, $\dot{q}_0$.

▷ **Exercice 2** (8 points)**.** On considère le problème à temps final $t_f > 0$ fixé

$$-q(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} u^2(t)\, \mathrm{d}t \to \min$$

($\lambda > 0$ est un paramètre fixé) pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}$, et où $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ sont fixés. On laisse $q(t_f)$ et $\dot{q}(t_f)$ libres.

2.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec f que l'on précisera.

2.2. Mettre le coût sous forme de Lagrange.

2.3. Donner le hamiltonien du problème.

2.4. Déterminer le système adjoint.

2.5. Écrire les conditions de transversalité.

2.6. Déterminer le contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint à l'aide de la condition de maximisation.

2.7. En déduire le contrôle optimal ainsi que la valeur optimale de $q(t_f)$.

▷ **Exercice 3** (5 points)**.** On considère le problème à temps final $t_f > 0$ fixé

$$\int_0^{t_f} (x_2(t)^2 + u_1^2(t) + (1+t^2)u_2^2(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

pour la dynamique

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = 2tx_1(t) - u_1(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où $x(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}^2$, et où $x(0) = x_0$ est fixé. On laisse $x(t_f)$ libre.

3.1. Mettre le problème sous la forme

$$\int_0^{t_f} [(C(t)x(t)|x(t)) + (D(t)u(t)|u(t))]\ \mathrm{d}t \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

avec $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ que l'on précisera.

3.2. Quelles sont les propriétés des matrices $C(t)$ et $D(t)$ qui garantissent l'existence et l'unicité de solution ?

3.3. Montrer que le contrôle optimal s'écrit comme un feedback sous la forme $u(t,x) = K(t)x$ où $K(t)$ est une matrice qui s'exprime en fonction de la solution d'une équation de Riccati : expliciter cette équation de Riccati. [On ne demande pas de la résoudre.]