Commande optimale
Examen (CC)

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés.

▷ **Exercice 1** (7 points)**.** On considère le problème du temps minimum pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}$, et où $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ sont fixés. On fixe également $q(t_f) = 0$ mais on laisse $\dot{q}(t_f)$ libre.

1.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec f que l'on précisera.

► $f(x, u) = (x_2, u)$

1.2. Donner le hamiltonien du problème.

► $H(x, u, p) = p^0 + p_1 x_2 + p_2 u$

1.3. Déterminer le système adjoint.

► $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = -p_1$

1.4. Écrire les conditions de transversalité.

► $p_2(t_f) = 0$

1.5. Déterminer le contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint à l'aide de la condition de maximisation.

► Si $p_2(t)$ est non nul, $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$.

1.6. En déduire la valeur du temps final en fonction des conditions initiales q_0, $\dot{q}_0$.

► Comme $\ddot{p}_2 = 0$, p_2 est affine et s'annule en t_f (et uniquement en t_f puisque p_2 identiquement nul conduirait à $(p^0, p) = (0, 0)$ vu que $H = 0$ en temps libre). On a donc p_2 de signe constant et $u \equiv 1$ où $u \equiv -1$: clairement, on doit avoir $u = -\varepsilon$ où $\varepsilon :=$ signe(q_0) (on suppose $q_0 \neq 0$, sinon $t_f = 0$). En intégrant et en utilisant par exemple la relation $(1/2)\dot{q}^2(t) + \varepsilon q(t) = \text{cte}$, on tire

$$t_f = \varepsilon \dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0^2 + 2\varepsilon q_0}.$$

▷ **Exercice 2** (8 points)**.** On considère le problème à temps final $t_f > 0$ fixé

$$-q(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} u^2(t)\,\mathrm{d}t \to \min$$

($\lambda > 0$ est un paramètre fixé) pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}$, et où $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ sont fixés. On laisse $q(t_f)$ et $\dot{q}(t_f)$ libres.

2.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ avec f que l'on précisera.

► $f(x, u) = (x_2, u)$

2.2. Mettre le coût sous forme de Lagrange.

► $f^0(x, u) = -x_2 + \lambda u^2$

2.3. Donner le hamiltonien du problème.

► $H(x, p, u) = (-1/2)(-x_2 + \lambda u^2) + p_1 x_2 + p_2 u$ (avec $p^0 = -1/2$)

2.4. Déterminer le système adjoint.

► $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = -1/2 - p_1$

2.5. Écrire les conditions de transversalité.

► $p_1(t_f) = p_2(t_f) = 0$

2.6. Déterminer le contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint à l'aide de la condition de maximisation.

► $u(t) = p_2(t)/\lambda$

2.7. En déduire le contrôle optimal ainsi que la valeur optimale de $q(t_f)$.

► $u(t) = (t_f - t)/(2\lambda)$, $q(t_f) = t_f^3/(6\lambda)$

▷ **Exercice 3** (5 points)**.** On considère le problème à temps final $t_f > 0$ fixé

$$\int_0^{t_f} (x_2(t)^2 + u_1^2(t) + (1+t^2)u_2^2(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

pour la dynamique

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = 2tx_1(t) - u_1(t), \quad t \in [0, t_f],$$

où $x(t)$ et $u(t)$ sont dans $\mathbf{R}^2$, et où $x(0) = x_0$ est fixé. On laisse $x(t_f)$ libre.

3.1. Mettre le problème sous la forme

$$\int_0^{t_f} [(C(t)x(t)|x(t)) + (D(t)u(t)|u(t))]\,\mathrm{d}t \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

avec $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ que l'on précisera.

►

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2t & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{bmatrix}.$$

3.2. Quelles sont les propriétés des matrices $C(t)$ et $D(t)$ qui garantissent l'existence et l'unicité de solution ?

► $C(t) \geq 0$, $D(t) > 0$

3.3. Montrer que le contrôle optimal s'écrit comme un feedback sous la forme $u(t,x) = K(t)x$ où $K(t)$ est une matrice qui s'exprime en fonction de la solution d'une équation de Riccati : expliciter cette équation de Riccati. [On ne demande pas de la résoudre.]

► $K(t) = D^{-1}(t)\,{}^t\!B(t)R(t)$ avec

$$\dot{R}(t) = C(t) - {}^t\!A(t)R(t) - R(t)A(t) - R(t)B(t)D^{-1}(t)\,{}^t\!B(t)R(t), \quad R(t_f) = 0$$