Examen

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés.

▷ **Exercice 1** (9 points)**.** On considère le problème de temps minimal pour la dynamique et les conditions aux limites ci-après :

$$\dot{x}(t) = 1 + x(t)u(t), \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [0, t_f] \text{ (p.p.)}$$
$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = 1$$

On suppose $x_0 < 1$, et on admet l'existence de solution.

1.1. Écrire le hamiltonien H du problème.

► $H(x, u, p) = p^0 + p + pxu$

1.2. Donner l'équation vérifiée par l'état adjoint.

► $\dot{p}(t) = -p(t)u(t)$

1.3. Montrer que l'état adjoint ne s'annule pas.

► Par linéarité de l'équation adjointe, si p s'annule il est identiquement nul ; comme $H = 0$ (temps final libre), on aurait aussi $p^0 = 0$, ce qui est interdit puisque $(p^0, p) \neq (0, 0)$.

1.4. Justifier que $H = 0$ en déduire que $p^0 \neq 0$.

► En temps final libre $H = 0$; si $p^0 = 0$, $1 + x(t)u(t) = 0$ (p.p.) puisque p ne s'annule pas ; cette égalité est clairement incompatible avec la contrainte $|u(t)| \le 1$ pour les conditions aux limites considérées.

1.5. Donner l'expression du contrôle en fonction de l'état et de l'état adjoint.

► $u = \text{signe}(px)$ si $x \neq 0$

1.6. Montrer que x s'annule au plus une fois.

► En $x = 0$, $\dot{x} = 1 > 0$: x change au plus une fois de signe.

1.7. En déduire qu'on a au plus une commutation du contrôle, et que dans ce cas $u = -1$ puis $u = 1$. [Évaluer le hamiltonien à la commutation.]

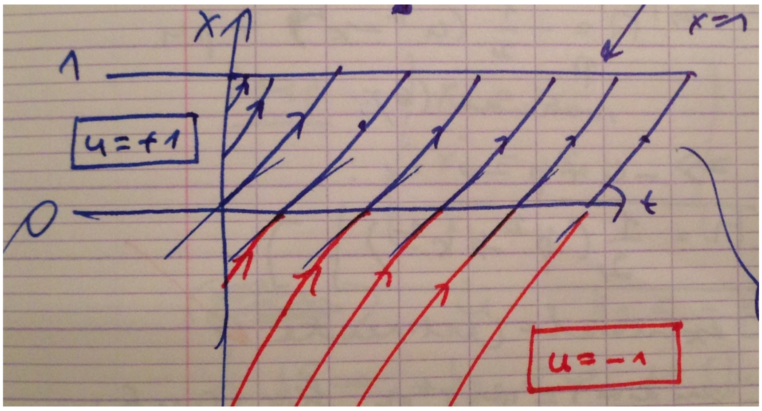

FIGURE 1 – Trajectoires temps minimales vers $x = 1$.

► Si $x(\bar{t}) = 0$, on a $p(\bar{t}) = -p_0 > 0$ en $\bar{t}$, d'où le changement de signe attendu pour le contrôle (p étant strictement positif, le signe de u est celui de x).

1.8. Montrer que, pour $x_0 < 0$, on a une commutation du contrôle et donner l'expression de cet instant de commutation.

► La cible étant $x(t_f) = 1 > 0$, x doit changer de signe, d'où la commutation : $u = -1$ jusqu'à $\bar{t}$, et $x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$ sur $[0, \bar{t}]$ implique que $\bar{t} = \ln(1 - x_0) > 0$.

1.9. Donner l'allure de la synthèse dans le plan (t, x). [Dessiner approximativement les trajectoires temps minimales.]

► Voir Fig. 1.

▷ **Exercice 2** (11 points).

2.1. Donner une formulation faible du problème ci-dessous permettant de traiter le cas où le second membre v appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$, sachant que Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$) à bord $\mathscr{C}^\infty$ (on note $\Gamma := \partial\Omega$) :

$$-\Delta y + y = v \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1}$$

► En inégrant par parties avec une fonction test dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on arrive à la formulation faible suivante :

$$(y|w)_{\mathrm{H}^1} = \int_\Omega v(x)w(x)\,\mathrm{d}x, \quad w \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

2.2. Montrer la coercivité et la continuité sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$ de la forme bilinéaire mise en évidence à la question précédente.

► Cette forme étant le produit scalaire sur H^1, coercivité et continuité sont évidentes.

2.3. En déduire qu'on a existence et unicité de solution (faible) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

► La forme linéaire dans le second membre de la formulation faible est continue puisque

$$|\int_\Omega v(x)w(x)\,\mathrm{d}x| \leq \|v\|_{\mathrm{L}^2}\|w\|_{\mathrm{H}^1},$$

d'où l'existence et l'unicité par Lax-Milgram (voire Riesz, directement).

2.4. On définit l'endomorphisme A de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ qui à v associe la solution faible correspondante. Montrer que A est continu.

► Comme conséquence de Lax-Milgram (et vu la majoration donnant la continuité de la forme linéaire à la question précédente), on a

$$\|Av\|_{\mathrm{H}^1} \leq \|v\|_{\mathrm{L}^2},$$

et on conclut en majorant la norme L^2 par la norme H^1.

2.5. Montrer que A est symétrique.

► Pour v et w dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on a

$$(Av|w)_{\mathrm{L}^2} = (Av|Aw)_{\mathrm{H}^1}$$

qui est symétrique.

2.6. Soit $z \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on considère le problème de commande optimale suivant :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (y(x)-z(x))^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2(x)\,\mathrm{d}x \to \min$$

sous la contrainte $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et où y est solution faible du problème (1). Montrer que le problème est équivalent à minimiser

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\psi, v\rangle$$

sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ où a est une forme bilinéaire symétrique et ψ une forme linéaire continue que l'on exprimera toutes deux en fonction de A et z.

► Il suffit d'écrire le coût sous la forme $\|Av-z\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|v\|_{\mathrm{L}^2}$ et de développer en utilisant la symétrie de A pour obtenir

$$a(v,w) := ((A^2+I)v|w)_{\mathrm{L}^2}, \quad \langle\psi, v\rangle := (Az|v)_{\mathrm{L}^2}.$$

2.7. Montrer que a est continue et coercive.

► Continuité évidente par composition, et coercivité immédiate grâce au terme en $\|v\|^2_{\mathrm{L}^2}$.

2.8. En déduire l'existence et l'unicité de solution au problème de commande optimale.

► Lax-Milgram.

2.9. Donner la caractérisation variationnelle de cette solution.

► La solution v est caractérisée par l'équation

$$a(v,w) = \langle \psi, w\rangle, \quad w \in \mathrm{L}^2(\Omega),$$

c'est à dire par l'équation $(A^2+I)v = Az$.

2.10. En introduisant un adjoint solution faible d'un problème que l'on précisera, traduire cette caractérisation sous la forme d'un système d'EDP.

► D'après la question précédente,

$$(A^2+I)v - Az = A(Av-z) + v = 0,$$

soit (avec $y = Av$ et $p = A(y-z)$)

$$-\Delta y + y = -p \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$
$$-\Delta p + p = y - z \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

puisque $v = -p$, chacune des deux EDP étant à interpréter au sens faible.

2.11. On se place finalement en dimension un avec $\Omega =]0,1[$. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le principe du maximum. [On admet que le PMP vaut, sous forme normale, pour des contrôles dans $\mathrm{L}^2(]0,1[)$.]

► Le problème s'écrit

$$\frac{1}{2}\int_0^1 ((q(t)-z(t))^2 + u^2(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

sous les contraintes

$$-\ddot{q}(t) + q(t) = u(t), \quad q'(0) = q'(1) = 0.$$

On pose $x = (q, \dot{q})$ pour se ramener à un système différentiel d'ordre un en dimension deux, de sorte que le Hamiltonien (sous forme normale, $p^0 = -1$) s'écrit :

$$H(t,x,u,p) = -(1/2)(x_1 - z(t))^2 - u^2/2 + p_1 x_2 + p_2(x_1 - u).$$

On en déduit en particulier l'équation adjointe

$$-\ddot{p}_2(t) + p_2(t) = x_1(t) - z(t), \quad \dot{p}_2(0) = \dot{p}_2(1) = 0,$$

les conditions de transversalité donnant les conditions aux limites voulues puisque $q = x_1$ est libre aux deux bouts et que $\dot{p}_2 = -p_1$. La maximisation du Hamiltonien donne finalement $u = -p_2$.