Feuille de révisions

▷ **Exercice 1.** On considère le problème de temps minimal pour

$$\ddot{q}(t) = \dot{q}(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f],$$

où q et u sont à valeurs dans $\mathbf{R}$, sous les conditions aux limites $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ (q_0 et $\dot{q}_0$ fixés), $q(t_f) = \dot{q}(t_f) = 0$.

1.1. Mettre la dynamique sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en posant $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$, avec f une fonction que l'on précisera.

► $f(x, u) = (x_2, x_2 + u)$

1.2. Montrer que le problème n'admet pas de solution si $|\dot{q}_0| \geq 1$.

► Si $\dot{q}_0 = x_{20} \geq 1$, la contrainte sur u implique $\dot{x}_2 \geq 0$ et on ne peut faire décroître x_2 vers zéro. De même si $x_{20} \leq -1$.

1.3. Écrire le hamiltonien du problème.

► $H(x, p, u) = p^0 + p_1 x_2 + p_2(x_2 + u)$

1.4. Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint $p = (p_1, p_2)$.

► $\dot{p}_1(t) = 0$, $\dot{p}_2(t) = -(p_1(t) + p_2(t))$

1.5. En déduire que p_2 est monotone.

► $p_2(t) = (p_{10} + p_{20})e^{-t} - p_{10}$, d'où la monotonie

1.6. Montrer que p_2 ne peut pas être identiquement nulle.

► On aurait sinon $p \equiv 0$, ce qui est interdit en temps min.

1.7. En déduire que le contrôle vaut $+1$ ou -1, avec au plus une commutation.

► La maximisation du hamiltonien implique $u = \operatorname{sgn}(p_2)$ si $p_2 \neq 0$, et p_2 s'annule au plus une fois d'après les deux questions précédentes.

1.8. Donner l'expression de x_1 et x_2 le long d'un arc où le contrôle est $u = 1$ et passant par $(0, 0)$ en $t = t_f$.

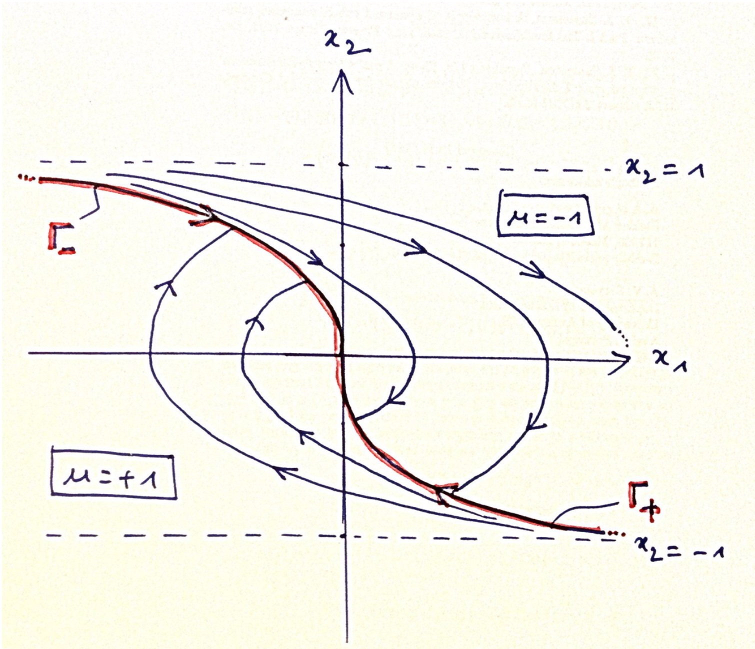

FIGURE 1 – Trajectoires temps minimales vers l'origine.

► $x_1(t) = (e^{t-t_f} - 1) - (t - t_f)$, $x_2(t) = e^{t-t_f} - 1$

1.9. En déduire l'équation en coordonnées (x_1, x_2) de l'arc correspondant, noté Γ_+, situé dans le demi-plan $x_1 \geq 0$.

► $x_1 = x_2 - \ln(1 + x_2)$

1.10. Donner l'allure de la synthèse dans le plan (x_1, x_2). [Dessiner approximativement les trajectoires temps minimales.]

► Voir Fig. 1.

▷ **Exercice 2.**

2.1. Donner une formulation faible du problème ci-dessous (problème de Poisson avec conditions aux limites de Fourier) permettant de traiter le cas où le second membre v appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$, sachant que α est une constante strictement positive et que Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$) à bord $\mathscr{C}^\infty$ (on note $\Gamma := \partial\Omega$) :

$$-\Delta y = v \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} - \alpha y = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1}$$

► En inégrant par parties avec une fonction test dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on arrive à la formulation faible suivante :

$$\int_\Omega (\nabla y(x)|\nabla w(x))\,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Gamma y(\gamma)w(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \int_\Omega v(x)w(x)\,\mathrm{d}x, \quad w \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

2.2. Sous l'hypothèse $\alpha > 0$, on admet la coercivité sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$ de la forme bilinéaire

$$(y, w) \mapsto \int_\Omega (\nabla y(x) | \nabla w(x))\,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Gamma y(\gamma) w(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma.$$

Montrer que cette forme est continue.

► En utilisant un théorème de trace, on majore la norme $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ par la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$, d'où la continuité puisque

$$|\int_\Omega (\nabla y(x) | \nabla w(x))\,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Gamma y(\gamma) w(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma| \leq (1 + C\alpha)\|y\|_{\mathrm{H}^1}\|w\|_{\mathrm{H}^1}.$$

2.3. En déduire qu'on a existence et unicité de solution (faible) dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

► La forme linéaire dans le second membre de la formulation faible est continue puisque

$$|\int_\Omega v(x) w(x)\,\mathrm{d}x| \leq \|v\|_{\mathrm{L}^2}\|w\|_{\mathrm{H}^1},$$

d'où l'existence et l'unicité par Lax-Milgram.

2.4. On définit l'endomorphisme A de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ qui à v associe la solution faible correspondante. Montrer que A est continu.

► Comme conséquence de Lax-Milgram, on a

$$\|Av\|_{\mathrm{H}^1} \leq C\|v\|_{\mathrm{L}^2},$$

et on conclut en majorant la norme L^2 par la norme H^1.

2.5. Montrer que A est symétrique.

► Pour v et w dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on a

$$(Av|w)_{\mathrm{L}^2} = \int_\Omega (\nabla(Av)(x) | \nabla(Aw)(x))\,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Gamma (Av)(\gamma)(Aw)(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma$$

qui est symétrique.

2.6. Soit $z \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on considère le problème de commande optimale suivant :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (y(x) - z(x))^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2(x)\,\mathrm{d}x \to \min$$

sous la contrainte $v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et où y est solution faible du problème (1). Montrer que le problème est équivalent à minimiser

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \langle \psi, v \rangle$$

sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ où a est une forme bilinéaire symétrique et ψ une forme linéaire continue que l'on exprimera toutes deux en fonction de A et z.

► Il suffit d'écrire le coût sous la forme $\|Av - z\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|v\|_{\mathrm{L}^2}$ et de développer en utilisant la symétrie de A pour obtenir

$$a(v, w) := ((A^2 + I)v|w)_{\mathrm{L}^2}, \quad \langle \psi, v \rangle := (Az|v)_{\mathrm{L}^2}.$$

2.7. Montrer que a est continue et coercive.

► Continuité évidente par composition, et coercivité immédiate grâce au terme en $\|v\|^2_{\mathrm{L}^2}$.

2.8. En déduire l'existence et l'unicité de solution au problème de commande optimale.

► Lax-Milgram.

2.9. Donner la caractérisation variationnelle de cette solution.

► La solution v est caractérisée par l'équation

$$a(v, w) = \langle \psi, w \rangle, \quad w \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

2.10. En introduisant un adjoint solution faible d'un problème que l'on précisera, traduire cette caractérisation sous la forme d'un système d'EDP.

► D'après la question précédente,

$$(A^2 + I)v - Az = A(Av - z) + v = 0,$$

soit (avec $y = Av$ et $p = A(y - z)$)

$$-\Delta y = -p \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} - \alpha y = 0 \text{ sur } \Gamma,$$
$$-\Delta p = y - z \text{ sur } \Omega, \quad \frac{\partial p}{\partial n} - \alpha p = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

puisque $v = -p$, chacune des deux EDP étant à interpréter au sens faible.

2.11. ► On se place finalement en dimension un avec $\Omega =]0, 1[$. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le principe du maximum. [On admet que le PMP vaut, sous forme normale, pour des contrôles dans $\mathrm{L}^2(]0, 1[)$.]

Le problème s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^1 ((q(t) - z(t))^2 + u^2(t))\, \mathrm{d}t \to \min$$

sous les contraintes

$$-\ddot{q}(t) = u(t), \quad -q'(0) - \alpha q(0) = 0, \quad q'(1) - \alpha q(1) = 0.$$