Examen CC no. 1

Durée 1H30. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (6 points)**.** Soit à miniminiser sans contraintes sur $\mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 - 13x_1 + 6x_2 + 1.$$

1.1. Montrer que le problème possède une et une seule solution.

► Il s'agit d'un problème sans contraintes de coût quadratique, $f(x) = (1/2)(Ax|x) + (b|x) + c$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -13 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c = 1.$$

On a $\det A = 23 > 0$ et $\operatorname{tr} A = 10 > 0$, donc les deux valeurs propres de A sont strictement positives et A est définie positive : f est donc croissante à l'infini sur $C = \mathbf{R}^2$, fermé, d'où l'existence. Comme $\nabla^2 f(x) = A > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, f est strictement convexe et on a également unicité.

1.2. Déterminer cette solution.

► La solution $\bar{x}$ vérifie la condition nécessaire du premier ordre sans contraintes, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, *i.e.* $A\bar{x} = -b$, d'où $\bar{x} = (2, -1)$.

▷ **Exercice 2** (7 points)**.** Soit à miniminiser sur $\mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$$

sous la contrainte $h(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

2.1. Montrer que le problème possède une solution.

► L'ensemble des contraintes C est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, il est fermé borné, donc compact ; la fonction coût est affine, donc continue, d'où l'existence.

2.2. Montrer qu'on a qualification des contraintes.

► On a $h'(x) = 2[(x_1 - 1) x_2]$ qui est de rang un (maximum) en tout point de C, donc on a qualification des contraintes.

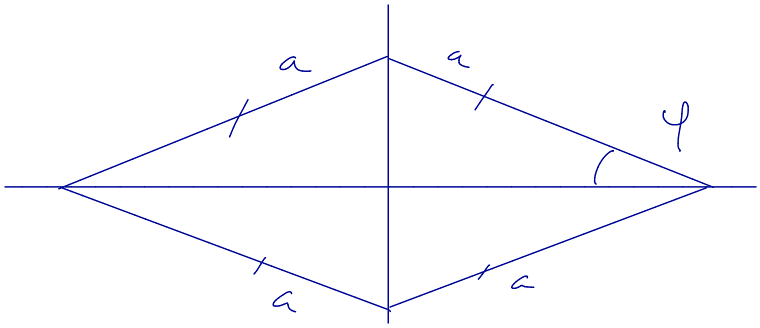

FIGURE 1 – Losange de périmètre fixé ($4a > 0$, a étant la longueur commune aux quatre côtés).

2.3. Déterminer la ou les solutions.

► La condition nécessaire de solution du premier ordre avec contraintes égalités implique donc qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\nabla L(x, \lambda) = 0$ avec $L(x, \lambda) = 2x_1 + x_2 + \lambda((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1)$, d'où

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda(x_1 - 1) &= 0, \\ 1 + 2\lambda x_2 &= 0, \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit $\bar{x} = (1 - 2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5)$ (et $\bar{\lambda} = \sqrt{5}/2$). (Les valeurs opposées annulent aussi ∇L mais donnent un maximum.)

▷ **Exercice 3** (7 points)**.** On souhaite déterminer le losange de périmètre fixé et d'aire maximale.

3.1. L'angle $\varphi \in [0, \pi/2]$ étant défini comme sur la Figure 1, montrer que le problème revient à minimiser $f(\varphi) := -\sin 2\varphi$ sous la contrainte $\varphi \in [0, \pi/2]$.

► L'aire est égale à $4(1/2)\cos\varphi \sin\varphi = \sin 2\varphi$.

3.2. En déduire l'existence de solution.

► La fonction est continue sur $[0, \pi/2]$, compact.

3.3. Montrer que les solutions appartiennent à $]0, \pi/2[$.

► L'aire est nulle pour $\varphi = 0$ ou $\pi/2$, ce qui n'est clairement pas la valeur maximale (l'aire est positive pour $\varphi = \pi/4$, par exemple).

3.4. En déduire la ou les solutions.

► La condition nécessaire de solution sans contraintes s'applique, et le seul zéro de $f'(\varphi) = 2\cos 2\varphi$ sur $]0, \pi/2[$ est obtenu pour $\varphi = \pi/4$: le losange d'aire maximale est donc le carré.