Examen

Durée 2H00. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (5 points). On considère, pour $a > b > 0$, le problème

$$\begin{cases} \min f(\theta, z) = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)/z^2 + z^2 \\ (\theta, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*. \end{cases}$$

1.1. Montrer qu'on peut supposer $z \geq z_0$, avec $z_0 > 0$ suffisamment petit.

► On a $f(\theta, z) \geq b^2/z^2 + z^2 \to +\infty$ quand $z \to 0+$: on peut donc se restreindre à chercher le minimum de f pour $z \geq z_0$ (avec $z_0 > 0$ assez petit).

1.2. En déduire l'existence de solution.

► Le même raisonnement qu'à la question précédente montre qu'on peut aussi supposer $z \leq z_1$ (pour $z_1 > 0$ suffisament grand). Par périodicité en θ, on peut donc ramener le problème sur le compact $[0, 2\pi] \times [z_0, z_1]$ et conclure à l'existence, f étant clairement continue.

1.3. Quels sont les points qui vérifient la condition nécessaire de solution du premier ordre ?

► À 2π près, les solutions de $\nabla f = 0$ sont

$$(0, \sqrt{a}),\ (\pi/2, \sqrt{b}),\ (\pi, \sqrt{a}),\ (3\pi/2, \sqrt{b}).$$

1.4. Parmi les points précédents, quels sont ceux qui vérifient en outre la condition nécessaire de solution du deuxième ordre ? En déduire les solutions du problème.

► La question précédente et le calcul du Hessien montrent que l'on doit à la fois avoir $\sin(2\theta) = 0$ et $\cos(2\theta) \leq 0$. Les solutions, modulo 2π en θ, sont donc $(\pi/2, \sqrt{b})$, $(3\pi/2, \sqrt{b})$.

▷ **Exercice 2** (5 points)**.** On considère le problème d'optimisation sur $(\mathbf{R}_+^*)^2$ avec contraintes d'égalité

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

où $\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$.

2.1. Montrer que le problème possède (au moins) une solution.

► L'ensemble des contraintes est la branche de l'hyperbole $x_1 x_2 = 1$ située dans le quadrant supérieur droit, c'est donc un fermé. Comme f est évidemment croissante à l'infini, on en déduit l'existence.

2.2. Montrer qu'on a qualification des contraintes en tout point de l'ensemble des contraintes.

► La dérivée $h'(x) = [x_2 \; x_1]$ est toujours non nulle sur l'ensemble des contraintes (sinon $x_1 = x_2 = 0$, ce qui contredit $x_1 x_2 = 1$). D'où sa surjectivité et la qualification des contraintes en tout point admissible.

2.3. Quels sont les points qui vérifient la condition nécessaire de solution du premier ordre ? Conclure.

► Les solutions de $\nabla L = 0$ sont $x_1 = -\lambda x_2$ avec $\lambda = \pm 1$: les x_i étant positifs, seule la solution $\lambda = -1$ est possible, d'où $x_1 = x_2 = 1$. Comme on a existence, c'est l'unique solution du problème.

▷ **Exercice 3** (6 points)**.** Maximiser la quantité d'information émise par une source discrète qui envoie n messages avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$ revient à maximiser l'entropie du système, définie par $-\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$. On considère pour cela le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} \tag{1}$$

où tous les x_i sont strictement positifs.

3.1. Montrer qu'on a qualification des contraintes sur (1) et appliquer la condition nécessaire du premier ordre.

► Une seule contrainte, $h(x) = (x|e) - 1$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$, soit

$$\nabla h(x) = e \neq 0$$

d'où la qualification. Le Lagrangien du problème est

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + \lambda((x|e) - 1).$$

Si $\bar{x}$ est solution, il existe $\bar{\lambda}$ tel que $\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, d'où

$$\bar{x_i} = \frac{1}{n},\ i = 1, n,\ \bar{\lambda} = \ln n - 1.$$

3.2. On prolonge $x_i \ln x_i$ par 0 en 0. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases} \tag{2}$$

avec

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

possède une solution (dessiner C en dimension 2 et 3).

► La fonction f est continue sur C compact (fermé borné, faire le dessin en dimension 2 ou 3 pour s'en convaincre).

3.3. Montrer que si $\bar{x}$ est solution de (2) avec $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p > 0$ ainsi que $\bar{x}_{p+1}, \dots, \bar{x}_n = 0$, alors $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ est solution du problème (1) de dimension p. En déduire que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, 0, \dots, 0)$ ne peut être solution de (2) en dimension n. Conclure pour le problème (1).

► Si $(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ est solution de (2), $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de (1), donc $x_1 = \cdots = x_p = 1/p$ d'après la question précédente ; or, on a

$$f(1/p, \dots, 1/p, 0, \dots, 0) = -\ln p > -\ln n = f(1/n, \dots, 1/n)$$

donc $(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ ne peut être solution. Ainsi, tous les x_i sont strictement positifs, de sorte que (1) et (2) sont équivalents ; (2) possédant une solution, le seul point vérifiant la condition nécessaire de (1) trouvé à la question précédente est l'unique solution de (1) et (2).

▷ **Exercice 4** (4 points)**.** On considère une tige métallique dont la longeur L varie en fonction de la température θ

$$L = C \exp(a_1\theta + a_2\theta^2)$$

où C, a_1 et a_2 sont des paramètres inconnus que l'on cherche à estimer à partir de m mesures (θ_k, L_k).

4.1. On suppose dans un premier temps C connnu. Proposer une estimation de a_1 et a_2 par moindres carrés linéaires.

► La quantité $\ln(L/C) = a_1\theta + a_2\theta^2$ suit une loi qui dépend linéairement des paramètres a_1 et b_2. On peut donc estimer $x := (a_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$ par moindres carrés linéaires en minimisant sans contraintes

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ \theta_m & \theta_m^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \ln(L_1/C) \\ \vdots \\ \ln(L_m/C) \end{bmatrix}.$$

4.2. Application numérique : $C = 1$, $m = 3$ et

θ	L
0	1
1	1
2	2

► La matrice A est clairement de rang 2 (injective), d'où

$$\bar{x} = A^+ b = (1/2)(-\ln 2, \ln 2)$$

avec $A^+ = ({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tA$.

4.3. On ne suppose désormais plus C connu. Proposer une méthode d'estimation de C, a_1 et a_2. Quel peut être l'intérêt de l'estimation par moindres carrés linéaires réalisée à la question précédente ?

► On peut poser le problème en moindres carrés non-linéaires en $x := (C, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$ selon

$$f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \left|C\exp(a_1\theta_i + a_2\theta_i^2) - L_i\right|^2 \to \min$$

(auquel cas l'estimation obtenue précédemment peut servir à initialiser la résolution).