Révisions 1

▷ **Exercice 1.** Soit à miniminiser sans contraintes sur $\mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 6x_1 + 9x_2 + 7.$$

1.1. Montrer que le problème possède une et une seule solution.

► Il s'agit d'un problème sans contraintes de coût quadratique, $f(x) = (1/2)(Ax|x) + (b|x) + c$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad c = 7.$$

On a $\det A = 17 > 0$ et $\mathrm{tr} A = 8 > 0$, donc les deux valeurs propres de A sont strictement positives et A est définie positive : f est donc croissante à l'infini sur $C = \mathbf{R}^2$, fermé, d'où l'existence. Comme $\nabla^2 f(x) = A > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, f est strictement convexe et on a également unicité.

1.2. Déterminer cette solution.

► La solution $\bar{x}$ vérifie la condition nécessaire du premier ordre sans contraintes, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, *i.e.* $A\bar{x} = -b$, d'où $\bar{x} = (-1, 2)$.

▷ **Exercice 2.** Soit à miniminiser sans contraintes sur $\mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := (3/2)(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 + x_1 - x_2 + 4.$$

2.1. Montrer que le problème possède une et une seule solution.

► Il s'agit d'un problème sans contraintes de coût quadratique, $f(x) = (1/2)(Ax|x) + (b|x) + c$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = 4.$$

On a $\det A = 5 > 0$ et $\mathrm{tr} A = 5 > 0$, donc les deux valeurs propres de A sont strictement positives et A est définie positive : f est donc croissante à l'infini sur $C = \mathbf{R}^2$, fermé, d'où l'existence. Comme $\nabla^2 f(x) = A > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, f est strictement convexe et on a également unicité.

2.2. Déterminer cette solution.

► La solution $\bar{x}$ vérifie la condition nécessaire du premier ordre sans contraintes, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, *i.e.* $A\bar{x} = -b$, d'où $\bar{x} = (1, -1)$.

▷ **Exercice 3.** Soit à miniminiser sans contraintes sur $\mathbf{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) := 2x_1^2 + 2x_2^2 + (3/2)x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 4x_1 - 6x_3 - 1.$$

3.1. Montrer que le problème possède une et une seule solution.

► Il s'agit d'un problème sans contraintes de coût quadratique, $f(x) = (1/2)(Ax|x) + (b|x) + c$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad c = -1.$$

La matrice A est à diagonale strictement dominante avec termes diagonaux positifs, donc A est définie positive : f est donc croissante à l'infini sur $C = \mathbf{R}^2$, fermé, d'où l'existence. Comme $\nabla^2 f(x) = A > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, f est strictement convexe et on a également unicité.

3.2. Déterminer cette solution.

► La solution $\bar{x}$ vérifie la condition nécessaire du premier ordre sans contraintes, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, *i.e.* $A\bar{x} = -b$, d'où $\bar{x} = (-1, 1, -2)$.

▷ **Exercice 4.** Soit à miniminiser sur $\mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$$

sous la contrainte $h(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

4.1. Montrer que le problème possède une solution.

► L'ensemble des contraintes C est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, il est fermé borné, donc compact ; la fonction coût est affine, donc continue, d'où l'existence.

4.2. Déterminer la ou les solutions.

► On a $h'(x) = 2[(x_1 - 1)x_2]$ qui est de rang un (maximum) en tout point de C, donc on a qualification des contraintes. La condition nécessaire de solution du premier ordre avec contraintes égalités implique donc qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\nabla L(x, \lambda) = 0$ avec $L(x, \lambda) = 2x_1 + x_2 + \lambda((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1)$, d'où

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda(x_1 - 1) &= 0, \\ 1 + 2\lambda x_2 &= 0, \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit $\bar{x} = (1 - 2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5)$ (et $\bar{\lambda} = \sqrt{5}/2$). (Les valeurs opposées annulent aussi ∇L mais donnent un maximum.)

▷ **Exercice 5.** Déterminer le parallélépipède d'aire strictement positive fixée et de volume maximal.

► Le problème se formule comme suit :

$$-x_1x_2x_3 \to \min,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = A/2, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

L'ensemble des contraintes est fermé borné (compact) et le coût continu, d'où l'existence. Clairement, le volume maximal ne pouvant être nul, on peut se placer sur l'ouvert $x_1, x_2, x_3 > 0$ et ne plus considérer que la seule contrainte $h(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - A/2 = 0$ (où $A > 0$ est l'aire fixée). La contrainte est qualifiée puisque

$$h'(x) = \begin{bmatrix} (x_2 + x_3) & (x_1 + x_3) & (x_1 + x_2) \end{bmatrix} \neq 0$$

sur l'ouvert considéré. Le lagrangien associé est

$$L(x, \lambda) = -x_1x_2x_3 + \lambda(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - A/2),$$

et la condition nécessaire du premier ordre implique

$$\begin{array}{rcl} -x_2x_3 + \lambda(x_2 + x_3) & = & 0, \\ -x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_3) & = & 0, \\ -x_1x_2 + \lambda(x_1 + x_2) & = & 0, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 & = & A/2. \end{array}$$

En soustrayant la première et la deuxième ligne, et ainsi de suite, on arrive à

$$\begin{array}{rcl} (x_1 - x_2)(x_3 - \lambda) & = & 0, \\ (x_2 - x_3)(x_1 - \lambda) & = & 0, \\ (x_1 - x_3)(x_2 - \lambda) & = & 0. \end{array}$$

On a deux possibilités : soit les trois côtés sont égaux ($x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{A/6}$), soient deux côtés sont égaux ($x_1 = x_2$, $x_3 = (A/2 - x_1^2)/(2x_1)$, et les deux cas symétriques). La deuxième possibilité conduit à maximiser $x_1(A/2 - x_1^2)$ avec $x_1 > 0$, d'où il résulte à nouveau $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{A/6}$. Le volume maximal est donc $(A/6)^{3/2}$.