Exam TD 1

▷ **Exercice 1.** Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

1.1. Calculer $E[X]$ et $V(X)$.

1.2. On définit $Y := \sin(X)$. Donner la loi de Y (montrer qu'elle est à densité et préciser cette densité.) [On rappelle que la fonction $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, réciproque de sin, est dérivable sur $]-1,1[$ et de dérivée égale à $\arcsin'(y) = 1/\sqrt{1-y^2}$.]

1.3. Calculer $E[Y]$.

▷ **Exercice 2.** On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, $p \in]0,1[$.

2.1. On définit le temps de premier succès $T = \inf\{n \geq 0,\ X_n = 1\}$. Donner la loi de T.

2.2. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_0 + \cdots + X_{n-1}$. Donner la loi de S_n, en justifiant le résultat pour $n = 1$. [On pourra représenter l'arbre de décision.]

▷ **Exercice 3.** On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Énoncer (sans la démontrer) l'inégalité de Hölder pour deux v.a. $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}_+$, $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{T}, P)$, $Y \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mathscr{T}, P)$ ($(p,q) \in [1,\infty]^2$, $1/p + 1/q = 1$).

▷ **Exercice 4.** On considère une promotion d'étudiants constituée de deux populations : les assidus, en proportion c_1, les absentéistes, en proportion c_2. La probabilité que les assidus aient un jour d'absence dans la semaine est notée p_1, celle que les absentéistes aient un jour d'absence dans la semaine p_2.

4.1. Un étudiant est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait un jour d'absence dans la semaine ?

4.2. Sachant qu'un étudiant n'a pas eu d'absence dans la semaine, quelle est la probabilité qu'il soit absentéiste ?

Exo 1.

1.1. Avec X uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$E[X] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

$$E[X^2] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3.8} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow V(X) = \pi^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{48}.$$

1.2.

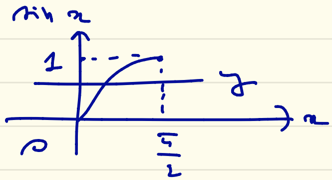
$Y = \sin X$; loi de Y : Y = valeurs dans $[-1,1]$ en

$$P[Y \le y] = P[\sin X \le y]$$

$y \in [0,1]$

$$= P[X \le \operatorname{asin} y]$$

$$= \int_0^{\operatorname{asin} y} \frac{dx}{(\pi/2)} \leftarrow \text{Avec } X \text{ uniforme sur } [0, \pi/2]$$



$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{asin} y$$

ie densité $\frac{2}{\pi}(\operatorname{asin} y)'$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

1.3. $$E[Y] = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\cdot\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\pi}\left[(1-y^2)^{-\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-y^2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\ ;$$

Exo2. (cf. Exo 11 TD1) $(X_n)_n$ v.a. indép. $\mathcal{B}(p)$ $p \in [0,1]$;

2.1. temps de premier succès :

$$T = \inf\{ n \geq 0 \mid X_n = 1 \}$$

$$P[T=n] = P[X_0 = 0 \wedge \dots \wedge X_{n-1} = 0 \wedge X_n = 1]$$

$(n \geq 0)$ $= (1-p)^n p$ (cf. indép.) (loi géométrique)

(NB. $\sum_{n \geq 0} (1-p)^n p = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$.)

2.2. $S := \underbrace{X_0 + \dots + X_n}_{\text{somme de } (n+1)\ \mathcal{B}(p) \text{ indép.}} \Rightarrow S$ binômiale $\mathcal{B}(n+1, p)$ (ie $P[S=k] = C^k_{n+1} (1-p)^k$

cf. pour $X+Y$, toutes deux $\mathcal{B}(p)$ et indép. :

$X=0$	$Y=0$	$X+Y=0$	$(1-p)^2$
$X=0$	$Y=1$	$X+Y=1$	$2p(1-p)$
$X=1$	$Y=0$	$X+Y=1$	$2p(1-p)$
$X=1$	$Y=1$	$X+Y=2$	p^2

Exo3. Hölder pour v.a. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \in L^p$, $Y \in L^q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$E[XY] \leq \left(E[X^p]\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(E[Y^q]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exo4. (cf. Exo 1 TD 2)

4.1. $p = p_1 c_1 + p_2 c_2$ (proba totales).

4.2. $q = (1-p_2) \cdot \frac{c_2}{1-p}$.