TD 1 — Rappels

▷ **Exercice 1.** Lesquelles des assertions suivantes sont toujours vraies (faire un dessin) ?

1.1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.3. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

▷ **Exercice 2.** Soit $\mathscr{F}$ une tribu sur Ω. On suppose que $B \in \mathscr{F}$. Montrer que $\mathscr{G} \equiv \{A \cap B, A \in \mathscr{F}\}$ est une tribu sur B contenant exclusivement des sous-ensembles de B.

▷ **Exercice 3.** Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω.

3.1. On note $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$. Montrer que $\sigma(X) := \{\{X \in A\},\ A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})\}$ est une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Retrouver le résultat de l'Exercice 2.

3.2. Généraliser au cas où X est un vecteur aléatoire (i.e. $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ mesurable).

▷ **Exercice 4.** Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles. Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

4.1. $X_1^2 + 2X_2 - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2, X_3)$.

4.2. $X_1^2 + 2X_2^3 - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1^2, X_2, X_3)$.

4.3. $X_1^2 + 2\cos(X_2) - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2^2, X_3)$.

4.4. $X_1^2 + 2X_2 - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

4.5. $\sigma(X_1^2, X_2X_1)$ est inclus dans $\sigma(X_1, X_2)$.

4.6. $\sigma(\sin(X_1))$ est inclus dans $\sigma(X_1)$.

4.7. Toute variable aléatoire qui est $\sigma(X_1, X_3, X_5)$-mesurable peut s'écrire comme $\varphi(X_1, X_3, X_5)$ pour une certaine fonction φ.

▷ **Exercice 5.**

5.1. Qu'appelle-t-on "loi" (notée P_X) d'un vecteur aléatoire $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$?

5.2. Donner la formule reliant $E[\varphi(X)]$ à P_X (ici $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction quelconque). Examiner le cas particulier $X : \Omega \to \mathbf{R}$ discrète et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ ayant une densité f_X.

5.3. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 7\}$. Calculer $E[X(X+3)]$.

5.4. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $E[e^U]$.

▷ **Exercice 6.**

6.1. Donner la définition de l'indépendance de deux événements A et B. Puis de trois événements A, B, C.

6.2. Donner la définition de l'indépendance de $n \geq 1$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

▷ **Exercice 7.** Rappeler et démontrer la formule des probabilités totales et en déduire la formule de Bayes.

▷ **Exercice 8.** On considère que le nombre N d'œufs pondus par un insecte donné suit une loi de Poisson de paramètre α et que la probabilité qu'un œuf donne une larve est p. On note L le nombre de larves. Les développements des œufs sont supposés indépendants. Donner la loi de L.

▷ **Exercice 9.** Soient $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, q)$ avec $n, m \geq 1$ et $p, q \in (0, 1)$ deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X + Y$ quand $p = q$.

▷ **Exercice 10.** Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $E[X^2+Y^2] < +\infty$.

10.1. Montrer que $E[X]$ et $E[Y]$ existent.

10.2. Montrer que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

10.3. Donner un contre exemple à l'égalité ci-dessus lorsque X and Y ne sont pas indépendantes.

▷ **Exercice 11.** On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, $p \in (0, 1)$.

11.1. On définit le temps de premier succès $T = \inf\{n \geq 0,\ X_n = 1\}$. Donner la loi de T.

11.2. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_0 + \cdots + X_{n-1}$. Donner la loi de S_n.

▷ **Exercice 12.** Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donner la loi de $X = \tan(U)$ puis de $Y = (1 + X^2)^{-1}$. Calculer l'espérance de Y.

▷ **Exercice 13.** On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

13.1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les v.a. L^2.

13.2. Démontrer l'inégalité de Jensen.

13.3. Démontrer l'inégalité de Hölder.

13.4. En déduire la croissance des normes L^p.

▷ **Exercice 14.**

14.1. Soient X, Y deux v.a. indépendantes gaussiennes de lois $N(m_1, \sigma_1^2)$ et $N(m_2, \sigma_2^2)$, respectivement. Donner la loi de $X + Y$.

14.2. En admettant que pour des v.a. gaussiennes la nullité de la covariance est équivalente à l'indépendance, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X - Y$ et $X + Y$ soient indépendantes.